Jakub Juránek, UČO 393110

3.4.B20
Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V takové, že prostor V je jejich přímým součtem (tj. $V = W_1 \dotplus W_2$). Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ je báze W_1, resp. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ je báze W_2.
Dokažte, že pak $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s$ je báze prostoru V.

1 Dle definice báze

1.1 Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé

Uvažme rovnici:

$$k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + k_r \cdot \mathbf{u}_r + l_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + l_s \cdot \mathbf{v}_s = \mathbf{o} \qquad (1)$$

kde $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in T$.
Označme:

$$\mathbf{u} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + k_r \cdot \mathbf{u}_r \quad \text{a} \quad \mathbf{v} = l_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + l_s \cdot \mathbf{v}_s$$

Máme tedy $\mathbf{u} \in W_1$ a $\mathbf{v} \in W_2$ takové, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{o}$.
Daná rovnost je vždy splněna pro $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{o}$, ovšem daný součet je přímý, tudíš vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ existují jednoznačně $\Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{o}$.
$\mathbf{u} = \mathbf{o} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + k_r \cdot \mathbf{u}_r$, ovšem $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ je báze W_1, jsou tedy lineálně nezávislé, musí tedy $k_1 = \cdots = k_r = 0$.
$\mathbf{v} = \mathbf{o} = l_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + l_s \cdot \mathbf{v}_s$, ovšem $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ je báze W_2, jsou tedy lineálně nezávislé, musí tedy $l_1 = \cdots = l_s = 0$.
Čímž jsme dokázali, že rovnost (1) je splněna pouze pro $k_1 = \cdots = k_r = l_1 = \cdots = l_s = 0$,
vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou tedy lineárně nezávislé.

1.2 Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ generují prostor V

Víme, že $V = W_1 \dotplus W_2$, tedy pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ existují, a to jednoznačně, vektory $\mathbf{u} \in W_1, \mathbf{v} \in W_2$ takové, že $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
$\mathbf{u} \in W_1$, tedy existují $k_1, \dots, k_r \in T$ tak, že $\mathbf{u} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + k_r \cdot \mathbf{u}_r$
$\mathbf{v} \in W_2$, tedy existují $l_1, \dots, l_s \in T$ tak, že $\mathbf{v} = l_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + l_s \cdot \mathbf{v}_s$
Dostáváme, že $\mathbf{x} = k_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + k_r \cdot \mathbf{u}_r + l_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + l_s \cdot \mathbf{v}_s$, tedy každý vektor z V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$.
Tímto jsme dokázali, že $V \subseteq L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$, přičemž opačná inkluze je zřejmá.
Dohromady $V = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$, čímž jsme dokázali požadovanou vlastnost, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ generují prostor V.

Tímto jsme z definice dokázali, že $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s$ je báze prostoru V.

2 Dle věty 4.3.2

2.1 Dimenze prostoru V je $r + s$, dle věty 4.5

Věta 4.5 nám říká, že

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) \\ \dim(V) &= r + s - \dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

Stačí nám tedy dokázat, že $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, neboli $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\}$.
Předpokládejme, že $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$. Protože $\mathbf{x} \in W_2$ a W_2 je vektorový prostor, tak $(-\mathbf{x}) \in W_2$.
Nyní můžeme vyjádřit nulový vektor těmito způsoby: $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$.
Protože je ale daný součet přímý, tak $\mathbf{x} = \mathbf{o} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{o}\} \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$.
Tímto jsme ale dokázali, že $\dim(V) = r + s$

2.2 Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé

Dokážeme stejně jako v **1.1**.

Tímto jsme dokázali, že $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_s$ je $r+s$ lineárně nezávislých vektorů v prostoru V dimenze $r+s$, jsou tedy dle věty 4.3 jeho bází.

3 Dle věty 4.3.3

3.1 Dimenze prostoru V je $r + s$, dle věty 4.5

Dokážeme stejně jako v **2.1**.

3.2 Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ generují prostor V

Dokážeme stejně jako v **1.2**.

Tímto jsme dokázali, že $\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_s$ je $r + s$ vektorů, které generují prostor V dimenze $r + s$, jsou tedy dle věty 4.3 jeho bází.